

11. 前期の復習

- キーワード：

連立 1 次方程式の掃き出し法による解法, 行列の基本変形, ピボット, 階数, 解の自由度, 行列の乗法, 逆行列, 交代積, 行列式, 余因子展開.

1] 次の各々の連立 1 次方程式を Gauss の消去法を用いて解け.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z + 2w = 1 \\ 3x - 5y - 3z + 4w = -3 \\ 2x - 2y + 5z + w = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 3y + z - 2w = 1 \\ -2x + 7y + 8w = -2 \\ -2y - 3z - 6w = 1 \\ -3y - 4z - 9w = -1 \end{cases}$$

2] 次の各々の連立方程式が解を持つように定数 a を決め, そのときの解をすべて求めよ.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y + z - 2w = -2 \\ 2x + 7y - z - 6w = -3 \\ x + 2y + 7z + 3w = -6 \\ 4x + 9y + 7z - 8w = a \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y + 2z + w = 1 \\ 2x + 7y + 5z + 4w = 2 \\ 2x + 9y + 8z + 6w = 6 \\ x + 5y + 5z + 3w = a \end{cases}$$

3] Three neighbors have backyard vegetable gardens. Neighbor A grows tomatoes, neighbor B grows corn, and neighbor C grows lettuce. They agree to divide their crops among themselves as follows: A gets $\frac{1}{2}$ of the tomatoes, $\frac{1}{3}$ of the corn, and $\frac{1}{4}$ of the lettuce. B gets $\frac{1}{3}$ of the tomatoes, $\frac{1}{3}$ of the corn, and $\frac{1}{4}$ of the lettuce. C gets $\frac{1}{6}$ of the tomatoes, $\frac{1}{3}$ of the corn, and $\frac{1}{2}$ of the lettuce. What prices should the neighbors assign to their respective crops if the equilibrium condition of a closed economy is to be satisfied, and if the lowest-priced crop is to have a price of \$100?

4] 次の行列 A について A^2, A^3, A^6 を求めよ.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5] $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, これらの行列全部を 1 回ずつ用いて積を作りたい. 積が定義できるすべての場合について, A, B, C, D の順とその結果を示せ.

6] 次の各々の行列 A について, 逆行列 A^{-1} を求め, $AA^{-1}, A^{-1}A$ がともに単位行列になることを確かめよ.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7] 次の連立一次方程式の解を前問で求めた逆行列を用いて求めよ.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 3y = -3 \\ -6x + 4y = 2 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = -4 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

8] 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換により, 2 点 $A(3, 0)$, $B(1, 2)$ がそれぞれ 2 点 C , D に移るとする. このとき, O を原点として, $\triangle OCD$ の面積は $\triangle OAB$ の何倍か.

9] 次の各々の行列式をもとめよ.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} & \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} & \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \\ \text{d) } \begin{vmatrix} -5 & 0 & 9 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} & \text{e) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \text{f) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -4 \end{vmatrix} \end{array}$$