

1 \mathbf{R}^4 のベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$$

と定義し, $A = (\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \vec{a}_3 | \vec{a}_4)$ を列ベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$ を並べてできる 4 次の正方行列とする. このとき行列 $(A | \vec{b})$ は行に関する基本変形によって下のように変形される.

$$(A | \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 5 & a \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right)$$

- 行列 A の階数を求めよ.
- 行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ.
- 行列 A は逆行列 A^{-1} を持つか? 持つ場合は A^{-1} を求めよ.
- 方程式 $A\vec{v} = \vec{0}$ の解をすべて求めよ.
- 方程式 $A\vec{v} = \vec{b}$ が解を持つように定数 a を決め, そのときの解をすべて求めよ.

学生証番号： _____ 氏名： _____

2 ある町に3つの主な産業部門がある。石炭を掘る採炭業、電力生産業、それに鉄道による輸送業がそれで、採炭業は石炭1ドル分を掘るのに0.25ドルの電力と、港まで石炭を運ぶために0.25ドルの輸送費が必要になる。また電力生産業は電力1ドル分を生産するのに燃料として石炭が0.65ドル分と、設備を動かすために電力0.05ドル分に、石炭の輸送費0.05ドル分必要となる。さらに輸送業では1ドル分の輸送を行うのにSLの燃料費として石炭が0.55ドル分と、その他の設備を動かすための電力0.10ドル分が必要となるという。

このとき採炭業者は町の外から50000ドルの注文を受け取り、電力業者も町の外から25000ドルの注文を受け取ったとする。ただし、輸送業者には外部からの注文はなかったとして、これらの注文を処理するのに、どれだけの生産活動をすれば、内部の需要を満たしつつ、注文を処理することができるか。

